GTR bis Klasse 11 (in G9) (Stand 25.07.2009)

Länge einer Strecke:
z.B. für A(1,2|4) , B(3,4|5,5) ;
über den Satz des Pythagoras: 2nd $\sqrt{\ }$ ((3,4 – 1,2)^2 + (5,5 – 4)^2) ENTER 2,66…
wenn man nicht über den Satz des Pythagoras rechnen will:
2nd{1.2, 4 2nd } STO L_1 ENTER und 2nd{3.4, 5.5 2nd} STO L_2 ENTER
mit 2nd STAT (A **LIST**) MATH 5 (sum) gibt man ein: sum((L_2–L_1)^2) ENTER 7,09 ; $\sqrt{\ }$ ANS ENTER 2,66…

Punkt auf einer Geraden?:
MODE Func ; Y = , z.B. für Y_1 = 0.75X – 6.75, mit GRAPH zeichnen lassen,
2nd TRACE (A **CALC**) 1 (value); X = einsetzen, Y-Wert ablesen und passendes Yi auswählen, falls man mehrere gezeichnet hat (umändern mit ↑ ↓).

Steigungswinkel einer Geraden:
MODE Func ; MODE Degree; z.B. für y = 2x, 2nd $\tan^{-1}$(2) ENTER 63.43 ...°
(Schnittwinkel zwischen zwei Geraden als Differenz zwischen den positiven Winkeln, z.B. − 45° als 135°)

Schnittpunkt zweier Geraden:
MODE Func ; z.B. für Y_1 = 0.75X – 6.75 und Y_2 = X – 8 ; ZOOM 4 (ZDecimal) oder 6 (ZStandard) oder WINDOW passend wählen, mit GRAPH zeichnen lassen;
CALC 5 (intersect); first curve → ENTER, second curve → ENTER, guess? ENTER, Intersection X=5 und Y= –3
Bemerkung: Mit 2nd QUIT, **ALPHA X** STO A und **ALPHA Y** STO B lassen sich sie beiden Werte **zur späteren Weiterverwendung speichern**.

Nullstelle einer Geraden:
MODE Func ; z.B. für Y_1 = 0.75X – 6.75, mit GRAPH zeichnen lassen,
CALC 2 (zero); Left Bound → (negativen Y-Wert nahe der Nullstelle suchen) ENTER, Right Bound → (positiven Y-Wert nahe der **Nullstelle** suchen) ENTER, guess? ENTER, Zero X=9 und Y= 0 ; analog: **Nullstellen beliebiger (meist) ganzrationaler Funktionen**

Lineare Regression:
z.B.: 2nd(**(** A **{)** also {1,3,5,7 } STO L_1 und {2.4, 3.7,5,6.3 } STO L_2; STAT → CALC 4 (LinReg (ax+b) L_1, L_2 ENTER:

Lin Reg y=ax+b, a= .65, b=1.75, also die Näherungsgerade y = 0,65x + 1,75 ; **(bei nur zwei Punkten erhält man die genaue Gerade)**

Bemerkung:
mit STAT → CALC 4 (LinReg (ax+b) L_1, L_2, **Y_1;** ENTER (über VARS, → Y-VARS 1 (Function), mit 1 Y_1 auswählen - in manchen Taschenrechnern muss man altes Y_1 vorher löschen - zeichnet der GTR die Gerade, die man mit GRAPH betrachten kann.

Quadratische Regression analog, STAT → CALC 5 (QuadReg) . analog mit 6, 7 und 0 weitere Regressionen für den Schulgebrauch.

Trigonometrische Funktionen:
Beachten: MODE **Degree** bei **Winkelangaben**, z.B. cos 21.4 ENTER .931.... Achtung: z.B. Y_1 = cos(X) zeigt im GRAPH-Menü unter ZOOM 7 (ZTrig) für X Winkel an, z.B. mit TRACE ablesbar!
MODE **Radian** für Funktionen, z.B. Y_1 = cos(X) braucht man, wenn man das Schaubild mit Schaubildern nicht-trigonometrischer Funktionen vergleichen will, weil man dann auf eine gemeinsame x-Achse angewiesen ist. Dann ist X ein Bogenmaß.

zusammengesetzte Funktionen und abschnittweise Darstellung:
MODE Func ; z.B. Y_1 = (.5X^3)(X ≥ – 3)(X ≤ 3) + (X + 2) (X ≥ 3)(X ≤ 7) ; mit ≥ aus 2nd TEST 4 und ≤ aus 2nd TEST 6 ,
mit GRAPH zeichnen lassen,
Um Fehler in der Darstellung zu vermeiden, bitte die Funktionsterme in Klammern setzen.

Ableitungsfunktion:
MODE Func ; z.B. Y_1 = .5X^3 – 3X + 2 ; mit GRAPH zeichnen lassen,
Y_2 = nDerive(Y_1,X,X) : das geht mit MATH 8, VARS, → Y-VARS 1 (Function), und mit 1 Y_1 auswählen :

Extremwerte, lokales Maximum: (Kurvenverlauf muss auf dem Bildschirm sichtbar sein!)
MODE Func ; GRAPH , z.B. Y_1 = 0.5X^3 – 3X + 2, Y_2 = nDerive(Y_1,X,X) mit GRAPH zeichnen lassen,
entweder
CALC 4 (maximum) Y_1; Left Bound → (linken Y-Wert nahe dem **Hochpunkt** suchen) ENTER, Right Bound → (rechten Y-Wert nahe dem **Hochpunkt** suchen) ENTER, guess? ENTER, Zero X=–1.4142... und Y= 4.8282...

oder

CALC 2 (zero) ↓ Y_2; Left Bound → (positiven Y-Wert nahe der **Nullstelle** suchen) ENTER, Right Bound → (negativen Y-Wert nahe der **Nullstelle** suchen) ENTER, guess? ENTER, Zero X=–1.4142... und

Y= 0 umändern mit ↑ in Y= 4.8282...

Extremwerte, lokales Minimum:

MODE Func, z.B. Y_1 = 0.5X^3 – 3X + 2, Y_2 = nDerive(Y_1,X,X) mit GRAPH zeichnen lassen,

entweder

CALC 3 (minimum) Y_1; Left Bound → (linken Y-Wert nahe dem **Tiefpunkt** suchen) ENTER, Right Bound → (rechten Y-Wert nahe dem **Tiefpunkt** suchen) ENTER, guess? ENTER, Zero X=1.4142... und Y=–.8284...

oder

CALC 2 (zero) ↓ Y_2; Left Bound → (negativen Y-Wert nahe der **Nullstelle** suchen) ENTER, Right Bound → (positiven Y-Wert nahe der **Nullstelle** suchen) ENTER, guess? ENTER, Zero X=1.4142... und

Y= 0 umändern mit ↑ in Y=–.8284...

Wendepunkt:

MODE Func ; z.B. Y_1 = 0.5X^3 – 3X + 2, Y_2 = nDerive(Y_1,X,X), Y_3 = nDerive(Y_2,X,X), mit GRAPH zeichnen lassen,

entweder (hier in diesem Beispiel)

CALC 3 (minimum) ↓ Y_2; Left Bound → ENTER, Right Bound → ENTER, guess? ENTER, Zero X=0... und Y=–3 und

Y= –3 umändern mit ↑ in Y=2

oder

CALC 2 (zero) ↓, ↓ Y_3; Left Bound → ENTER, Right Bound → ENTER, guess? ENTER, Zero X=0... und

Y= 0 umändern mit ↑, ↑ in Y=2

Wendetangente:

2nd PRGM (A **DRAW**) für Y_1, 5 (Tangent), X=0, ENTER , ablesen Y=–3x+2, Achtung: 2,9999995 = 3 !

Parabeln:

z.B. f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit f(0) = 0, f(1) = 1, f ´(1) = –1 , f ´´(1) = 0 führt auf d = 0 und

auf mit 2nd x^{-1} (A **MATRIX**) → → EDIT 1 (MATRIX [A]), 3 x 4,

1a + 1b + 1c =   1   eintippen   [1   1   1   1]   (waagrecht tippen, mit ENTER bestätigen, senkrecht Tippfehler kontrollieren)
3a + 2b + 1c = –1   [3   2   1 –1]
6a + 2b + 0c =   0   [6   2   0   0]

weiter mit 2nd MODE (A **QUIT**), MATRIX $\rightarrow$ MATH, ALPHA B auf rref(MATRIX NAMES 1 ([A])), ENTER
auf rref([A]), ENTER und es erscheint [1   0   0   2]
[0   1   0   –6]
[0   0   1   5]

übersetzen in 0a + 0b + 1c = 5, 0a + 1b +0c = –6, 1a + 0b +0c = 2, also f(x) = $2x^3 - 6x^2 + 5x$.

Kombinatorik:

$\binom{5}{3}$ **: 5** MATH $\rightarrow$ PRB 3 (nCr) 3 ENTER ; 10 wird angezeigt

Praxis der Binomialverteilung:

Beispiel: 3 x würfeln, k A Anzahl der Einser

Auflisten der Treffer von 0 bis 3	P(genau k Treffer) P(X=k)	P(höchstens bis zu k Treffern) $P(X \le k)$	P(mindestens k Treffer) $1 - P(X \le k-1)$
2nd STAT (A **LIST**) OPS 5(**seq**)	2ndVARS (A **DISTR**) 0(binompdf)	DISTR ALPHA A(binomcdf)	
seq(X,X,0,3) STO L_1 ENTER	binompdf(3,1/6) STO L_2 ENTER	binomcdf(3,1/6) STO L_3 ENTER	1– L_3 ENTER STO L_4 ENTER
es erscheint: {0,1,2,3} oder in STAT 1 (Edit eine Liste L_1mit den Zahlen untereinander	es erscheint: {0.5787... , usw } oder in STAT 1 (Edit eine Liste L_2 mit den Zahlen untereinander	es erscheint: {0.5787... , usw } oder in STAT 1 (Edit eine Liste L_3 mit den aufsummierten Wahrscheinlichkeiten untereinander	es erscheint: {0.4213... , usw } oder in STAT 1 (Edit eine Liste L_4 mit den aufsummierten Gegenwahrscheinlichkeiten untereinander („eine Zeile höher ablesen“)
	STAT PLOT 1 auf ON Xlist : L_1 Ylist: L_2 Mark: ·	STAT PLOT 2 auf ON Xlist : L_1 Ylist: L_3 Mark: +	STAT PLOT 3 auf ON Xlist : L_1 Ylist: L_4 Mark: °

Mit MODE Func ; ZOOM 9 (ZoomStat) erscheint eine passende Graphik. Mit TRACE (oder in STAT Edit 1) kann man die einzelnen Werte ablesen, wenn man mit ↓ oder ↑ von $P_1:L_1,L_2$ je nach Bedarf nach $P_2:L_1,L_3$ oder $P_3:L_1,L_4$ wechselt.
Achtung!: z.B. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$, also in $P_3:L_1,L_4$ bei X=1 ablesen.

Diese Tabelle lässt sich mit Platzhaltern verallgemeinern, so dass immer die richtigen Tabellen zur Verfügung stehen:

Beispiel: 10 x würfeln, 10 STO ALPHA N (= Länge einer Bernoulli-Kette) , X A Anzahl der Einser, p = 1/6 STO ALPA P (= Trefferwahrscheinlichkeit), also eine $B_{n;p}$-verteilte Zufallsvariable, hier $B_{10;1/6}$.
Also n STO ALPHA N und p STO ALPA P genügen, wenn folgende Tabelle eingegeben bleibt:
(Die Anführungszeichen " (A ALPHA+) braucht man, um bei wechselnden Werten von N oder P eine automatische Neuauswertung zu erhalten.)

Auflisten der Treffer von 0 bis n	P(genau X Treffer) P(X=k) oder $B_{n;p}(k)$	P(höchstens, bis zu X Treffer)	P(mindestens X Treffer)
LIST OPS 5(seq)	DISTR 0(binompdf)	DISTR ALPHA A(binomcdf)	
In STAT EDIT **auf dem L1-Platz** Mit " (ALPHA +) umrahmen, "seq(X,X,0,N)" ENTER oder "seq(X,X,0,N)" STO L_1 ENTER	In STAT EDIT **auf dem L2-Platz** Mit " umrahmen, "binompdf(N,P) " ENTER oder " binompdf(N,P)" STO L_2 ENTER	In STAT EDIT **auf dem L3-Platz** Mit " umrahmen, "binomcdf(N,P)" ENTER oder " binomcdf(N,P)" STO L_3 ENTER	In STAT EDIT **auf dem L4-Platz** Mit " umrahmen, "1– L_3" ENTER oder "1– L_3" STO L_4 ENTER
es erscheint: nach L_1 ENTER {0;1;2;,...N} oder in STAT 1 (Edit) eine Liste L_1mit den Zahlen untereinander	es erscheint: nach L_2 ENTER {0.16151... ; usw.} oder in STAT 1 (Edit) eine Liste L_2 mit den Zahlen untereinander	es erscheint: nach L_3 ENTER {0.16151... ; usw.} Oder in STAT 1 (Edit) eine Liste L_3 mit den aufsummierten Wahrscheinlichkeiten untereinander	es erscheint: nach L_4 ENTER {0.83849... ; usw.} oder in STAT 1 (Edit) eine Liste L_4 mit den aufsummierten Gegenwahrscheinlichkeiten untereinander („eine Zeile höher ablesen“)
	STAT PLOT 1 auf ON Xlist : L_1 Ylist: L_2 Mark: ·	STAT PLOT 2 auf ON Xlist : L_1 Ylist: L_3 Mark: +	STAT PLOT 3 auf ON Xlist : L_1 Ylist: L_4 Mark: °

Mit MODE Func ; ZOOM 9 (ZoomStat) erscheint eine passende Graphik. Mit TRACE (oder in STAT Edit 1) kann man die einzelnen Werte ablesen, wenn man mit ↓ oder ↑ von P_1:L_1,L_2 je nach Bedarf nach P_2:L_1,L_3 oder P_3:L_1,L_4 wechselt.
Achtung!: z.B. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$, also in P_3:L_1,L_4 bei X=1 („eine Zeile höher ablesen“) ablesen.

Oft geht es **schneller, nur** einen **Einzelfall** zu betrachten, allerdings dann ohne Grafik:
z.B. n = 120 , p = .15 P(X=12) = binom**p**df(120,.15,**12**) = 0.3261 (Wahrscheinlichkeit für genau 12 Treffer)
$P(X \leq 12)$ = binom**c**df(120,.15,**12**) = 0.746 (Wahrscheinlichkeit für bis zu12 Treffer) „kumulierte Wahrscheinlichkeitsdichte“

Mindestlänge einer Bernoulli-Kette
Beispiel: n x würfeln, also eine $B_{n;1/6}$ - verteilte Zufallsvariable, wann P(mindestens drei Sechser) = $1 - P(X \leq 2)$, $\geq 0{,}8$?
ohne Graphik:
seq(1 – binom**c**df(X,1/6,2),X,**1**, 30), wobei man mit **1** beginnen (sonst zählt der GTR falsch) und die 30 probieren muss, STO L_1,
in STAT 1 runterblättern und ablesen $L_1(25)$ =.8113, also n $\geq$ 25.
mit Graphik (geht offensichtlich nur mit MODE seq und STAT PLOT auf Off):
unter Y= erscheint dann ein anderes Menü mit
*n*Min=1 oder 3, u(*n*)= 1 – binom**c**df(*n*,1/6,2) , v(*n*)=.8 , GRAPH, danach mit TRACE und → *n*=25, X=25 und Y=.8113 ablesen
WINDOW *n*Min=1, *n*Max=30, Xmin=0, Xmax=30, Ymin=0, Ymax=1.1, Yscl=.1 genügen.

Testen von Hypothesen: (dauert bei langen Bernoulli-Ketten im Grafik-Modus beim Aufsummieren sehr lang!)
z.B. ein Politiker hatte bei der letzten Wahl 40 % Stimmen. Mit einer Stichprobe bei 100 Befragten will er testen, ob er an Zustimmung gewonnen oder verloren hat. Er riskiert 5% Fehleinschätzung (Irrtumswahrscheinlichkeit).
mit Graphik:
100 STO ALPHA N, 0.4 STO ALPHA P, der obigen “Platzhalter-Tabelle” mit L_1, L_2 L_3, L_4, Y1=0.05 und Y2=0.95 plottet man (L_2 und) **L_3** und die gewünschten Grenzen. WINDOW Xmin=25, Xmax=55 (d.h. jeweils 15 vom Erwartungswert 40 entfernt), Ymin=0, Ymax=1.1, Yscl=.1 genügen.
GRAPH, mit TRACE ↓ **P_2:L_1,L_3** kann man den **linken** Bereich {0, 1, ,,, , 31} ablesen, d.h. stimmen 31 oder weniger Befragte für ihn, so geht er mit **mindestens** 95%iger Wahrscheinlichkeit davon aus, dass sein **Stimmenanteil gesunken** ist. Analog erhält er den **rechten Bereich** {**49=**48+**1**, 50, ,,, , 100}, d.h. stimmen 49 oder mehr Befragte für ihn, so geht er mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit davon aus, dass sein **Stimmenanteil gestiegen** ist. (um 1 höher zählen deshalb, weil $P(T \geq 49) = 1 - P(T \leq 48) \leq 0{,}05$; vgl. L_4)
Er riskiert (**als Fehler 1. Art**) in beiden Fällen, dass er mit **höchstens** 5%iger Wahrscheinlichkeit nur eine zufällig unzutreffende Befragungssituation hatte.
ohne Graphik:

Mit STAT 1 (=Edit) kann man die Liste L_3 abwärts verfolgen bis in L_3 ein **letzter** Wert kleiner als 0.05 auftaucht, hier X=31 und weiter, bis in L_3 ein **zweiter** Wert größer als 0.95 auftaucht, hier X= 49. (Das geht auch mit MODE Seq.)

Bemerkung:
Das 11er-Buch verwendet ab Seite 167 in den Zeichnungen irreführend P_1:L_1,L_2 *, um den Ablehnungsbereich sichtbar zu machen. Doch der wird* ***nur*** *durch* ***P_2:L_1,L_3*** *und die* ***gewünschte*** *Irrtumswahrscheinlichkeit* $P(T \leq g) \leq \alpha$ *bzw.* $P(T \geq g) = 1 - P(T \leq (g-1)) \leq \alpha$ *festlegt. Den Sinn von Fehlern 2. Art konnte mir bis heute niemand erklären. Man kann sie als Zahl zwar ausrechnen, doch was fängt man in der Praxis mit dieser Zahl eigentlich an?*
Winfried Schley, Stand: 25.07.2009